

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____

- 1** Dada la función $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^x$, calcula:

a) $f(0), f(-2), f(-5), f\left(\frac{1}{2}\right), f(6)$

b) $f^{-1}\left(\frac{81}{4}\right), f^{-1}\left(\sqrt[5]{\frac{9}{2}}\right), f^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)$

- 2** Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right)^{x^2 + 1}$

- 3** Halla la rentabilidad de un millón de euros en un año a un interés compuesto anual del 3,5 %. ¿Y si la capitalización es continua?

- 4** Construye la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{si } x < 0 \\ 3^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

¿Es una función continua? ¿Es inyectiva?

- 5** El número de habitantes de una ciudad crece exponencialmente de 125 000 a 140 000 habitantes desde 1985 a 1995. ¿Cuántos habitantes se puede calcular que tendrá en el año 2000, suponiendo que el ritmo de crecimiento no varía?

- 6** A partir de las representaciones gráficas de las funciones $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, calcula:

a) Su punto de intersección.

b) En qué intervalo del dominio se cumple que $f(x) > g(x)$.

c) En qué intervalo del dominio se cumple que $f(x) < g(x)$.

- 7** La tasa anual de crecimiento de un bosque es del 3 %. Calcula la cantidad de madera que tendrá al cabo de 5 años, si inicialmente tiene unos 6 000 m³ y las condiciones de crecimiento se mantienen. Después, expresa la función que rige su crecimiento como una exponencial de base e.

- 8** Dada la función $f(x) = \log_5 x$, calcula:

a) $f\left(\frac{1}{\sqrt{125}}\right), f(0,2), f(0,008)$

b) $f^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right), f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right), f^{-1}(-1,25)$

- 9** Un producto se lanza al mercado con una previsión de ventas para las primeras 20 semanas, determinada por la función $N(t) = 1\,500 e^{0,25t}$, donde N es el número de unidades que se prevé vender y t es el tiempo en semanas. Averigua la expresión que refleja el tiempo transcurrido según las unidades vendidas y estima cuántas semanas deben transcurrir para que se hayan vendido 10 000 unidades.

- 10** Imagina que una persona consume el suficiente alcohol para alcanzar el doble del nivel a partir del cual está prohibido conducir, que es de 0,08 mg/cc en sangre. Supón que la disminución de alcohol se rige por la función $m(t) = m_0(1/3)^t$, donde m es la cantidad de alcohol por centímetro cúbico y t , el tiempo medido en horas. Calcula el tiempo que se debe dejar transcurrir para que se alcance el nivel autorizado para poder conducir un vehículo.

- 11** Aplica las propiedades de los logaritmos y simplifica la siguiente expresión:

$$1 + \log 6 - \log 5 + \frac{1}{2} \log 3 - \log 36 - \frac{\log 27}{2}$$

- 12** El número de bacterias de un cultivo viene determinado por la expresión $N(t) = 2,75 \cdot 1,3^t$, donde t es el tiempo medido en horas y N el número de miles de individuos. Calcula el tiempo que tarda en duplicarse el cultivo. Escribe la función como una exponencial de base e.

- 13** Calcula: $\log_3 100, \log_{1/2} 25, \log_{\sqrt{5}} 50$

- 14** Determina la función inversa de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{100}{1 + 55 e^{-0,025x}}$

b) $f(x) = 3 + \log_4(x - 2)$

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____

15 ¿Es periódica $f(x) = \sin |x|$? Ayúdate de una gráfica.**16** ¿Para qué valores de la derivada x se cumple que $\sin x = \cos x$?**17** Averigua el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

b) $f(x) = \ln(1 - \operatorname{tg} x)$

c) $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\operatorname{tg} x}}$

18 Estudia la simetría de las siguientes funciones.

a) $f(x) = |\sin x + \operatorname{tg} x|$

b) $f(x) = x \cos x + x^2 \sin x$

c) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos x$

19 Calcula el dominio y el recorrido de la función $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$. Averigua su tipo de simetría y su período, en caso que sea periódica.**20** Define la función arco cotangente. ¿Cuál es su dominio? ¿Y su recorrido?**21** Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $5^{2x-1} = \sqrt[3]{5^{x+2}}$

b) $8^{3x+2} = \left(\frac{1}{32}\right)^{6-x}$

c) $3 \cdot 2^{x+1} - 7 \cdot 2^{x-2} = 34$

d) $2^x = 3 \cdot 4^{1-x}$

e) $2^{x+1} = e^{4-x}$

22 Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_5(x+3) - \log_5 x = 2$

b) $2^{\ln x} = 3 - 5 \cdot 2^{\ln x}$

c) $\log x^2 - 2 \log(x+1) + \log 4 = 0$

d) $\log_2 x - \log_2 1024 = \frac{\log_2 x}{2}$

23 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sec x = \sin x + \cos x$

b) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$

c) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \cos 2x$

d) $\cos^2 2x - \sin^2 2x = \frac{1}{2}$

24 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \log_{\frac{x}{2}}(y+5) = 1 \\ \log x - \log 2 = \log 6 - \log y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log x + \log y = 6 \\ \log x^2 - \log y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_x(12-y) = 3 \\ \log_y \frac{1}{2+x} = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 13 \\ \ln e^x = \ln e^{y+1} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log x + \log y = \log 4x - \log y \\ x \log 2 + y \log 3 = 288 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x y \log 2 = 524288 \\ 2^{x+y} = 4^{3x-y} \end{cases}$

g) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin x - \cos y = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^{-y} = -21 \\ 3^{x-1} + 5^{y+2} = 10 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \sqrt[x]{256} - \sqrt[y]{64} = 0 \\ 3^x - 9 \cdot 3^{2y-1} = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2 \cos 2x = \operatorname{tg} y \\ 4 \sin^2 2x - 2 \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$

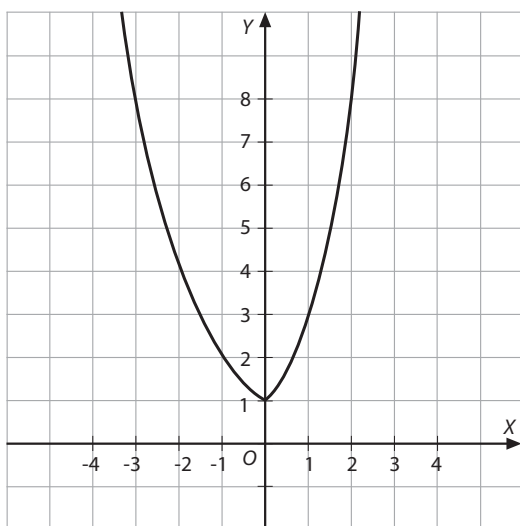
1 a) $f(0) = 1, f(-2) = \frac{9}{2}, f(-5) = \frac{243}{4\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}},$
 $f(6) = \frac{8}{729}$

b) $f^{-1}\left(\frac{81}{4}\right) = -4, f^{-1}\left(\sqrt{\frac{9}{2}}\right) = \frac{-2}{5}, f^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right) = \frac{2}{3}$

2 a) e^{-3} **b)** e

3 Anual: 1 035 000 €, continuo: 1 035 620 €.

4 Es continua y no es inyectiva.



5 148 162 habitantes.

6 a) $(0, 1)$

b) En $(0, +\infty)$

c) En $(-\infty, 0)$

7 $6956 \text{ m}^3, M = M_0 e^{0,03t}$

8 a) $f\left(\frac{1}{\sqrt{125}}\right) = \frac{-3}{2}, f(0,2) = -1, f(0,008) = -3$

b) $f^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}, f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt[4]{5^3}$

$f^{-1}(-1,25) = \frac{1}{\sqrt[4]{5^5}}$

9 $t = \frac{\ln 10000 - \ln 1500}{0,25} = 7,588 \Rightarrow$ Entre 7 y 8 semanas.

10 Aproximadamente 38 min.

11 $-\log 9$

12 2,64 horas. $N(t) = 2,75 e^{0,26t}$

13 $\log_3 100 = 4,19$

$\log_{1/2} 25 = -4,64$

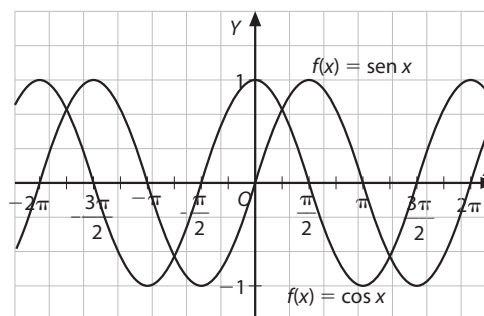
$\log_{\sqrt{5}} 50 = 4,86$

14 a) $f^{-1}(x) = 40 [\ln 55x - \ln (100 - x)]$

b) $f^{-1}(x) = 4^{x-3} + 2$

15 No es periódica.

16



$\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi\right) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

17 a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{Dom } f(x) = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left\{\pi k, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$

18 a) Par, simétrica respecto del eje de ordenadas.

b) Impar, simétrica respecto del origen de coordenadas.

c) No tiene simetría.

19 $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\text{Rec } f(x) = \mathbb{R}$

Es una función impar, simétrica respecto del origen de coordenadas. Su período es 2π .

20 $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$\text{Rec } f(x) = (0, \pi)$

21 a) $x = 1$

d) $x = 1,195$

b) $x = -9$

e) $x = \frac{4 - \ln 2}{\ln 2 + 1}$

c) $x = 3$

22 a) $x = \frac{1}{8}$ **b)** $x = \frac{1}{e}$ **c)** $x = 1$ **d)** $x = 2^{20}$

23 a) $\begin{cases} x = k \cdot 180^\circ \\ x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $\begin{cases} x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $x = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

d) $\begin{cases} x = 15^\circ + k \cdot 90^\circ \\ x = 75^\circ + k \cdot 90^\circ \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

24 a) $\begin{cases} \log_{x^{2/2}}(y+5) = 1 \\ \log x - \log 2 = \log 6 - \log y \end{cases}$

Se puede construir el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} = y + 5 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

Por sustitución: $\frac{x^2}{2} = \frac{12}{x} + 5$

Haciendo común denominador: $x^3 = 24 + 10x$, esto es: $x^3 - 10x - 24 = 0$.

Solucionando esta ecuación por Ruffini se obtiene una única solución real, $x = 4$, y, por tanto, $y = 3$.

$$b) \begin{cases} \log x + \log y = 6 \\ \log x^2 - \log y = 0 \end{cases}$$

El sistema equivalente que se consigue al aplicar las propiedades de los logaritmos es:

$$\log x \cdot y = 6 \Rightarrow 10^6 = xy$$

$$\log \frac{x^2}{y} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{x^2}{y}$$

Por sustitución:

$$10^6 = x^3 \Rightarrow x = 100, y, \text{ por tanto: } y = 10\,000$$

$$c) \begin{cases} \log_x (12 - y) = 3 \\ \log_y \left(\frac{1}{2 + x} \right) = -1 \end{cases}$$

Aplicando la definición de logaritmo se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x^3 = 12 - y \\ y = 2 + x \end{cases}$$

Por sustitución:

$$x^3 + x - 10 = 0$$

Solucionando esta ecuación por Ruffini se obtiene: $x = 2$.

Por tanto, $y = 4$.

$$d) \begin{cases} \log(x + y) + \log(x - y) = \log 13 \\ \ln e^x = \ln e^{y+1} \end{cases}$$

Por las propiedades de los logaritmos se tiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} (x + y)(x - y) = 13 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

Operando y sustituyendo:

$$x^2 - y^2 = 13 \Rightarrow (y + 1)^2 - y^2 = 13 \Rightarrow 2y + 1 = 13 \Rightarrow y = 6, \text{ por lo que } x = 7$$

$$e) \begin{cases} \log x + \log y = \log 4x - \log y \\ x \log 2 + y \log 3 = \log 288 \end{cases}$$

Por las propiedades de los logaritmos se puede construir el sistema equivalente:

$$\begin{cases} xy = \frac{4x}{y} \Rightarrow y = 2 \text{ (-2 no puede ser)} \\ 2^x \cdot 3^y = 2^5 \cdot 3^2 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} xy \log 2 = \log 262\,144 \\ 2^{x+y} = 4^{3x-y} \end{cases}$$

$262\,144 = 2^{18}$, por lo que se puede escribir:

$$\begin{cases} \log 2^{xy} = \log 2^{18} \\ 2^{x+y} = 2^{6x-2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 18 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$5\left(\frac{18}{y}\right) - 3y = 0 \Rightarrow 90 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{30} \Rightarrow x = \pm\frac{18}{\sqrt{30}}$$

$$g) \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin x - \cos y = 0 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Restando, se obtiene:

$$2 \cos y = 1 \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$y = 300^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$h) \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^{-y} = -21 \\ 3^{x-1} + 5^{y+2} = 10 \end{cases}$$

Hacemos $3^x = z$ y $5^y = w$:

$$\begin{cases} 2z - \frac{3}{w} = -21 \\ \frac{z}{3} + 25w = 10 \end{cases}$$

Por sustitución se obtiene una ecuación de segundo grado, cuya solución positiva para z es 27, es decir, $3^x = 27 \Rightarrow x = 3$, y para el valor de w se obtiene

$$\frac{1}{25}, \text{ es decir: } 5^y = \frac{1}{25} \Rightarrow y = -2$$

$$i) \begin{cases} \sqrt{x-y} \sqrt{256} - \sqrt[3]{64} = 0 \\ 3^x - 9 \cdot 3^{2y-1} = 0 \end{cases}$$

Se pueden reescribir ambas ecuaciones del siguiente modo:

$$\begin{cases} 2^{8/(x-y)} = 2^{6/y} \\ 3^x - 3^{1+2y} = 0 \end{cases}$$

Igualando exponentes:

$$\begin{cases} \frac{8}{x-y} = \frac{6}{y} \\ x = 1 + 2y \end{cases}$$

Por sustitución se obtiene:

$$x = 7, y = 3$$

$$j) \begin{cases} 2 \cos 2x = \operatorname{tg} y \\ 4 \sin^2 2x - 2 \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$$

Sustituimos la primera ecuación en la segunda:

$$4 \sin^2 2x - 4 \cos 2x = 1$$

$$\Rightarrow 4(1 - \cos^2 2x) - 4 \cos 2x = 1$$

Se obtiene una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$$\cos 2x = -\frac{12}{8} \Rightarrow \text{No existe solución.}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Las soluciones que se obtienen son:}$$

$$\begin{cases} x = 30^\circ + k \cdot 180^\circ \\ x = 150^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Y para el valor de y se obtiene: $\operatorname{tg} y = 1$

$$\Rightarrow y = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$$